

**Etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026. Clasa a XI-a (Barem de notare și evaluare)**

○ *Orice soluție corectă, diferită de cea sugerată în barem, se punctează corespunzător.*

	<b>Din oficiu.</b>	<b>10 p</b>
<b>1.</b>	<p>(a) Folosind relația Hamilton – Cayley este suficient să dăm exemple de matrice <math>X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})</math> cu <math>\text{tr}X = -1</math> și <math>\det X = -3</math>.</p> <p>De exemplu: <math>X_1 = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 \end{pmatrix} \neq X_2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 3 &amp; -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}</math></p> <p><i>Observație:</i> așa cum remarcăm, orice soluții corecte obținute și prin calcul efectiv se punctează corespunzător.</p>	14 p
	$(X - I_2)(X + 2 \cdot I_2) = (X + 2 \cdot I_2)(X - I_2) = I_2$ și astfel, conform definiției inversei unei matrice, se obține concluzia.	8 p
	<b>Total Problema 1.</b>	<b>22 p</b>
<b>2.</b>	<p>(a) Deoarece <math>d = \begin{vmatrix} i &amp; i^3 &amp; 1 \\ j &amp; j^3 &amp; 1 \\ k &amp; k^3 &amp; 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i &amp; i^3 &amp; 1 \\ j-i &amp; j^3-i^3 &amp; 0 \\ k-i &amp; k^3-i^3 &amp; 0 \end{vmatrix} = (j-i)(k-i) \begin{vmatrix} i &amp; i^3 &amp; 1 \\ 1 &amp; j^2+ji+i^2 &amp; 0 \\ 1 &amp; k^2+ki+i^2 &amp; 0 \end{vmatrix} =</math></p>	6 p
	$= (j-i)(k-i)(k-j)(k+i+j) \neq 0$ și concluzia este imediată.	6 p
	<p>(b) <math>\mathcal{A}(\Delta A_2 A_n B) = \frac{1}{2} \cdot  \Delta </math>, unde <math>\Delta = \begin{vmatrix} 2 &amp; 8 &amp; 1 \\ n &amp; n^3 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \end{vmatrix} = 2n^3 - 7n - 2</math>.</p>	2 p
	<p>Egalitatea din enunț conduce la două cazuri posibile, anume:</p> <p>( I ) <math>2n^3 - 7n - 2 = 31</math> sau <math>(n-3)(2n^2 + 6n + 11) = 0, n \in \mathbb{N}</math>, deci <math>n = 3</math>.</p>	4 p
	<p>( II ) <math>2n^3 - 7n - 2 = -31</math>, adică <math>E(n) = 0</math>, unde <math>E(n) = n(2n^2 - 7) + 29</math>.</p> <p>Cum <math>E(0) \neq 0, E(1) \neq 0</math> și <math>E(n) \geq 31 &gt; 0, \forall n \geq 2</math>, avem că <math>n = 3</math> este unica soluție.</p>	4 p
	<b>Total Problema 2.</b>	<b>22 p</b>

3.	<p>Considerăm șirurile <math>a_n = \ln(n+1), b_n = 2n+3, n \geq 1</math> și deoarece</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{n+2}{n+1} = 0, \text{ criteriul Cesaro - Stolz conduce la } L_1 = 0.$	8 p
	$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3n+2}}{\frac{\pi}{3n+2}} \cdot \frac{\pi}{3n+2} \cdot \frac{(\sqrt[n]{4}-1)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = 1 \cdot \ln 4 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi \cdot \ln 2}{3}$	8 p
	$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{-1} \cdot \frac{-2n}{2n+1}} = e^{-1}.$	7 p
	<b>Total Problema 3.</b>	<b>23 p</b>
4.	<p>(a) <math>a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} &gt; 0, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>, așadar șirul este strict crescător</p>	4 p
	<p>Însumăm inegalitățile <math>\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}</math> care se obțin pentru <math>k = \overline{1, n}</math></p> <p>și se ajunge la <math>\frac{1}{2} \leq a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \frac{n}{n+1} &lt; 1, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>, deci șirul este și mărginit.</p>	4 p
	Conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.	2 p
	<p>(b) Deoarece <math>x_n - x_n^2 \leq \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>, rezultă că <math>x_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1</math> și deducem că șirul este mărginit.</p>	4 p
	<p>Pe de altă parte avem <math>x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - x_n^2 - x_n^2}{\sqrt{x_n - x_n^2} + x_n} = \frac{x_n(1-2x_n)}{\sqrt{x_n - x_n^2} + x_n} \geq 0, \forall n \geq 1,</math></p> <p>adică șirul este crescător.</p>	5 p
	Aceeași teoremă conduce la concluzia că șirul este convergent	1 p
	<p>Prin trecere la limită în relația de recurență și ținând cont de faptul că șirul este strict crescător, se obține limita finită <math>\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.</math></p>	3 p
	<b>Total Problema 4.</b>	<b>23 p</b>